

UMA SOLUÇÃO NUMÉRICA DO OSCILADOR HARMÔNICO SIMPLES E AMORTECIDO PELO MÉTODO DE EULER E RUNGE-KUTTA DE QUARTA ORDEM

RODRIGUES, Edinardo Ivison Batista¹

RESUMO: A importância do estudo das equações diferenciais justifica-se pelo fato de ocorrerem com muita frequência na modelagem matemática de diferentes situações práticas, principalmente na área de física. Para a resolução dessas equações diferenciais é fundamental a utilização de métodos numéricos. O método numérico tem o objetivo de determinar um ou mais valores numéricos, que são soluções aproximadas de um certo problema. Neste trabalho serão apresentados e discutidos dois métodos numéricos para resolução de equações diferenciais, os métodos numéricos utilizados serão o de Euler e o de Runge-Kutta de 4º ordem. Através desses métodos foi possível plotar gráficos que descrevem o comportamento do oscilador harmônico simples e amortecido.

Palavras-chave: Equações diferenciais. Métodos numéricos. Soluções aproximadas.

1 INTRODUÇÃO

Muitos fenômenos naturais são regidos por equações diferenciais de primeira e de segunda ordem, e diante disso podemos descrever esses fenômenos a partir de uma modelagem matemática e computacional. Para solucionarmos certas equações diferenciais é de fundamental importância a utilização de métodos numéricos, pois com frequência soluções analíticas não são possíveis ou muito difícil de serem determinadas.

Os mais variados sistemas de engenharia e ciência mudam ao longo do tempo, espaço e muitas outras dimensões de interesse. Em física-matemática, as derivadas de função são frequentemente usadas para modelar tais mudanças. No entanto, na prática, a função pode não ser conhecida explicitamente ou pode ser representada implicitamente por um conjunto de pontos de dados. Nesses casos e em outros, pode ser desejável calcular as derivadas numericamente em vez de analiticamente (KONG, Q., SIAUW, T., BAYEN, A., 2020).

¹ Professor, Instituição IF Baiano/Campus Bom Jesus da Lapa, e-mail: edinardo.rodrigues@ifbaiano.edu.br

As técnicas numéricas são usadas para obter soluções aproximadas de um determinado sistema (ATKINSON K., HAN, W, STEWART, D., 2009). Precisamos de aproximações porque não podemos resolver o procedimento analiticamente ou porque o método analítico é intratável (um exemplo é resolver um conjunto de mil equações lineares simultâneas para mil incógnitas).

Ao contrário dos métodos analíticos, que conduzem a soluções exatas para os problemas, os métodos numéricos produzem, em geral, apenas soluções aproximadas. Por este fato, antes da utilização de qualquer método numérico é necessário decidir qual a precisão dos cálculos com que se pretende obter a solução numérica desejada. A precisão dos cálculos numéricos é também, como veremos, um importante critério para a seleção de um algoritmo particular na resolução de um dado problema (ATKINSON K., HAN, W, STEWART, D., 2009).

Neste trabalho serão apresentados e discutidos dois métodos numéricos para resolução de equações diferenciais, os métodos numéricos utilizados serão o de Euler e o de Runge-Kutta de 4º ordem (RK4). O método de Euler é também conhecido como método da reta tangente ou método de passo simples, corresponde ao truncamento da série de Taylor na primeira derivada (EPPERSON, J. F., 2013). É um dos métodos mais antigos e mais simples para obter soluções aproximadas de equações diferenciais de primeira ordem, as EDO's. Por outro lado, o método de RK4 pode ser entendido como o aperfeiçoamento do método de Euler, com uma melhor estimativa da derivada da função, o mais usado na resolução numérica de equações diferenciais

2 METODOLOGIA

No estudo consideramos, inicialmente, um sistema composto por uma mola e um bloco de massa m e que inicialmente podem movimentar-se livremente de tal forma que a resultante das forças que atuam na massa é a Lei de Hooke $F = -kx$, onde k é a medida da rigidez da mola, conhecida como constante elástica, e o sinal negativo implica que tal força age para restaurar o bloco à sua posição de equilíbrio. Aplicando a segunda Lei de Newton a equação de movimento para o bloco pode ser escrito como

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0, \quad (2)$$

essa é uma equação diferencial de segunda ordem com $\omega_0^2 \equiv k/m$.

Consideramos também o movimento do mesmo sistema massa-mola quando uma força de resistência horizontal atua sobre ele, neste caso temos um movimento amortecido onde a equação que rege o movimento tem a seguinte forma

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0, \quad (3)$$

com β sendo o parâmetro de amortecimento.

As equações (1) e (2) foram resolvidas utilizando dois métodos numéricos, o método de Euler e o método de Runge-Kutta de quarta ordem (RK4). O método de Euler é conhecido como método da reta tangente o qual corresponde ao truncamento da série de Taylor na primeira derivada. Esse método foi introduzido por Euler para resolver de maneira aproximada um problema de equação diferencial ordinária na forma $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ com condição de contorno $y(x_0) = y_0$ (PEDROSA, D. P. F, 2011). O método de Euler consiste em, no primeiro passo, calcular $y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0)$, que é a aproximação y_1 da solução exata $y(x_1)$ no ponto x_1 e h é um coeficiente real. No segundo passo, $y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1)$, que é a aproximação y_2 da solução exata $y(x_2)$ no ponto x_2 . E assim sucessivamente, para cada um dos pontos x_n com $n = 0; 1; 2; \dots; N$ de um intervalo $[a; b]$ (GOULD, H.; TOBOCHNIK, J.; CHRISTIAN, W., 2002).

Entre os métodos numéricos mais utilizados para calcular a solução aproximada de problemas de valor inicial, está o método de Runge-Kutta por ser um método bastante preciso. A precisão desse método é equivalente ao método de Taylor, porém, com a vantagem de evitar o cálculo de derivadas de ordem elevada que além da complexidade analítica, exigem um significativo esforço computacional. Ao contrário disso, os métodos de Runge-Kutta são baseados na avaliação da função $f(x, y)$ em alguns pontos. Destacamos aqui o método de Runge-Kutta de quarta ordem que tem a forma $y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$, (4)

onde $k_1 = f(x_n, y_n)$, $k_2 = f(x_n + h/2, y_n + k_1/2)$, $k_3 = f(x_n + h/2, y_n + k_2/2)$ e $k_4 = f(x_n + h, y_n + k_3)$ são as inclinações estimadas. Essas inclinações são determinadas pela média ponderada das inclinações em cada ponto: k_1 é a inclinação no início do intervalo, k_2 a inclinação no ponto médio do intervalo, usando a inclinação k_1 para determinar o valor de y no ponto $x_n + h/2$ através do método de Euler, k_3 é

novamente a inclinação no ponto médio do intervalo, mas agora usando a inclinação k_2 para determinar o valor de y e k_4 a inclinação no final do intervalo, com seu valor y determinado usando k_3 . No método de Runge-Kutta, busca-se uma melhor estimativa da derivada com a avaliação da função em mais pontos no intervalo $[x_n, x_{n+1}]$ (GOULD, H.; TOBOCHNIK, J.; CHRISTIAN, W., 2002).

3 RESULTADOS E DISCUSSÕES

O estudo foi realizado em três etapas. A primeira etapa foi analisada a dinâmica do sistema massa mola em um movimento livre, regido pela equação (1), e na presença de uma força resistiva horizontal, regida pela equação (2). A segunda etapa foi a implementação numérica nas equações (1) e (2) através dos métodos de Euler e de Runge-Kutta de quarta ordem na linguagem de programação C, esta implementação tem como objetivo apresentar em gráficos o comportamento do deslocamento do bloco de massa m . E na terceira etapa foram construídos os gráficos com uso do software Mathematica 9.0.

Para realizarmos as duas últimas etapas implementamos do método de Euler no algoritmo abaixo:

```

xn1 = xn + vn * dt; /* Equacao de Posicao */
vn1 = vn - w * w * xn1 * dt; /* Equacao de Velocidade*/
t = i * dt; /* instante de tempo com o passo i*/
xn = xn1; /* posicao do passo anterior igual a posicao do proximo passo*/
vn = vn1; /* velocidade do passo anterior igual a velocidade do proximo passo*/

```

E para a implementação do método de RK4 foi construído o seguinte algoritmo

```

/* inclinações para a velocidade*/
k1v = - w * w * xn * dt - 2 * B * vn * dt;
k2v = - w * w * (xn + 0.5 * k1v) * dt - 2 * B * (vn + 0.5 * k1v) * dt;
k3v = - w * w * (xn + 0.5 * k2v) * dt - 2 * B * (vn + 0.5 * k2v) * dt;
k4v = - w * w * (xn + k3v) * dt - 2 * B * (vn + k3v) * dt;
vn1 = vn + (k1v + 2 * k2v + 2 * k3v + k4v)/6.0; /* Equacao de Velocidade*/
/* inclinações para a posição*/

```

$$k1x = vn1 * dt;$$

$$k2x = (vn1 + 0.5 * k1x) * dt;$$

$$k3x = (vn1 + 0.5 * k1x) * dt;$$

$$k4x = (vn1 + k1x) * dt;$$

$$xn1 = xn + (k1x + 2 * k2x + 2 * k3x + k4x)/6.0; /* Equacao de Posicao */$$

$$t = i * dt; /* instante de tempo empo com o passo i*/$$

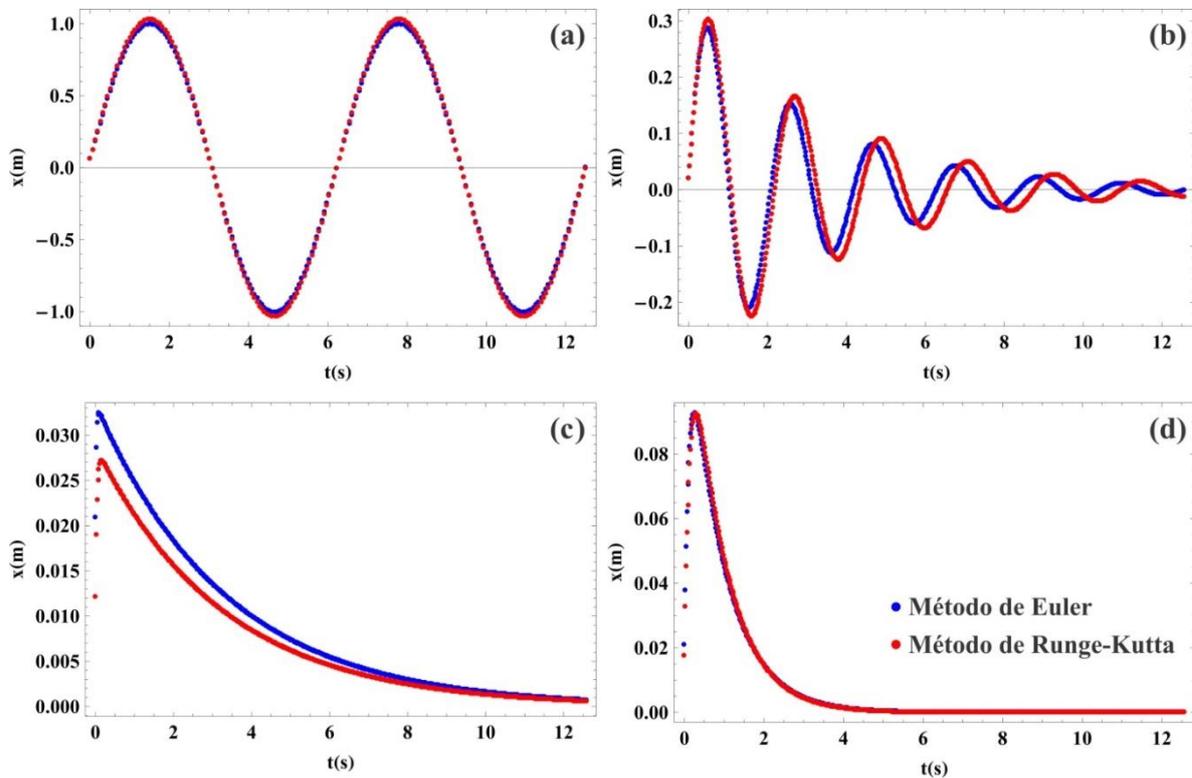
$$xn = xn1; /* posicao do passo anterior igual a posicao do proximo passo*/$$

$$vn = vn1; /* velocidade do passo anterior igual a velocidade do proximo passo*/$$

Para resolver os algoritmos acima, consideramos 200 passos (ou seja $i = 0; i \leq 199; i = i + 1$) e $\omega_0^2 = 1$ para o caso da equação (1). Para a equação (2) tivemos três casos de interesse geral: (i) sub-amortecido $\omega_0^2 > \beta^2$, (ii) sobre-amortecido $\omega_0^2 < \beta^2$ e (iii) criticamente amortecido $\omega_0^2 = \beta^2$. No caso (i) consideramos que $\omega_0^2 = 9$ e $\beta^2 = 0,3$, no caso (ii) $\omega_0^2 = 9$ e $\beta^2 = 15$ e no terceiro caso $\omega_0^2 = \beta^2 = 9$. Nos três casos consideramos 600 passos (ou seja $i = 0; i \leq 599; i = i + 1$). Com os dados gerados na implementação numérica foi possível plotar no Mathematica os gráficos apresentados na Figura 1. Nos gráficos temos uma comparação de ambos os métodos utilizados, onde o método de Euler está representado pelas curvas em azul e o método RK4 está representado pelas curvas em vermelho.

Na Figura 1 (a) temos o comportamento periódico para o sistema massa mola livre de forças resistivas, veja que a amplitude de oscilação permanece constante. Na Figuras 1 (b), (c) e (d) temos a presença da força resistiva; onde em (b) temos o caso em que o movimento é sub-amortecido, perceba que amplitude das oscilações vai diminuindo aos poucos devido a presença da força resistiva. Um exemplo típico de um movimento sub-amortecido é a porta dos saloons dos filmes de bang-bang. Quando alguém em passa pela porta ela inicia a oscilação com uma grande amplitude, que vai diminuindo com o tempo; em (c) o movimento é sobre-amortecido, ou seja, nesse caso não chega a acontecer nenhuma oscilação então a amplitude de oscilação vai ficando sempre menor (TAVARES, 2014); e por último na Figura 1 (d) temos o movimento criticamente amortecido, a amplitude de oscilação cai muito rapidamente quando comparado com o movimento sobre-amortecido. Note que ambos os métodos descrevem bem o movimento do sistema massa-mola

Figura 1 – Oscilador harmônico simples e amortecido. Em (a) temos o sistema massa-mola com $\omega_0^2 = 1$ e livre de força resistiva, em (b) temos o movimento sub-amortecido com $\omega_0^2 = 9$ e $\beta^2 = 0,3$, na figura (c) é mostrado o movimento sobre-amortecido com $\omega_0^2 = 9$ e $\beta^2 = 15$ e em (d) $\omega_0^2 = \beta^2 = 9$ para o movimento criticamente amortecido.



Fonte: elaboração própria.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao estudar os fenômenos físicos muitas vezes não é possível de imediato encontrar expressões explícitas das grandezas que caracterizam tal fenômeno. No entanto, normalmente é mais fácil estabelecer a dependência entre estas quantidades e suas derivadas. Dessa forma, obtemos equações diferenciais que contêm funções desconhecidas e podemos solucioná-las através de métodos numéricos. Aqui, as equações diferenciais estudadas são associadas ao comportamento do oscilador harmônico, também conhecido como sistema massa mola, simples e amortecido. As soluções numéricas para o oscilador foram obtidas através dos métodos de Euler e Runge-Kutta de quarta ordem, os quais podemos analisar e comprovar por representação gráfica que ambos os métodos são úteis para a resolução de certos sistemas físicos que são regidos por equações diferenciais.

REFERÊNCIAS

- ATKINSON K., HAN, W, STEWART, D. **Numerical Solution of Ordinary Differential Equations**. John Wiley & Sons, 2009.
- EPPERSON, J. F. **An introduction to numerical methods and analysis**. John Wiley & Sons, 2013.
- GOULD, H,; TOBOCHNIK, J.; CHRISTIAN, W. **An Introduction to Computer Simulation Methods: Applications to Physical Systems**. Publisher Addison Wesley, 2002.
- KONG, Q., SIAUW,T., BAYEN, A. **Python Programming and Numerical Methods**. Elsevier, 2020.
- PEDROSA, D. P. F. **Resolução Numérica de Equações Diferenciais Ordinárias**, 2011. Disponível em: <https://www.dca.ufrn.br/~diogo/FTP/dca0304/edo.pdf>. Acesso em: 20 nov. 2022.
- TAVARES, R. **Notas de aula de física, 2014**. Disponível em: http://www.fisica.ufpb.br/~romero/pdf/16_oscilacoesVI.pdf. Acesso em: 20 nov. 2022.